3 octobre 2018.

CENTRE
DE RECHERCHES
MATHÉMATIQUES

Mathématiques générales - MAT0339
Devoir I - Corrigé

#1

a) $\frac{1}{7}+\frac{1}{5} = \frac{5}{35}+\frac{7}{35} = \frac{12}{35}$

b) $\frac{3}{10}+\frac{5}{14} = \frac{21}{70}+\frac{25}{70} = \frac{46}{70} = \frac{23}{35}$, car $\text{pgcd}(10,14)=70$

c) $\frac{5}{12}+\frac{5}{9} = \frac{15}{36}+\frac{20}{36} = \frac{35}{36}$

d) $\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{-1}{8}}$ n'est pas défini

e) $2^3-3^2 = 8-9 = -1$

f) $a^b \times a^c = a^{b+c}$ (règle des exposants)

g) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

h) $\sqrt[2]{64} = \sqrt[2]{2^6} = 2^3 = 8$

i) $\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$

j) $(3x^2+1)+(5x+2) = 3x^2+5x+2+1 = 3x^2+5x+3$

k) $(3x^2+1)-(5x+2) = 3x^2+1-5x-2 = 3x^2-5x-1$

l) $(3x^2+1)(5x+2) = 15x^3+6x^2+5x+2$

m)
$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \qquad -8 & x-2 \\
\hline
-\;(x^3-2x^2) & x^2+2x+4 \\
2x^2-8 & \\
-\;(2x^2-4x) & \\
4x-8 & \\
-\;(4x-8) & \\
0 &
\end{array}
$$

Donc, $(x^3-8)\div(x-2) = x^2+2x+4$

Vérification : $(x-2)(x^2+2x+4) = x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8$
$= x^3-8$.

#2 a) $x^2+4xy+4y^2 = x^2+2xy+2xy+4y^2$

$= x(x+2y)+2y(x+2y)$ mise en évidence double.

$= (x+2y)^2$

b) $x^4+2x^3+x^2 = x^2(x^2+2x+1)$ mise en évidence simple

$= x^2(x+1)^2$ méthode somme-produit. avec somme 2 et produit 1.

c) $x^2-7x+10 = (x-5)(x-2)$ somme-produit avec somme -7 et produit 10.

d) $3x^2-14x+8 = 3x^2-2x-12x+8$ somme-produit avec somme -14 et produit 8

$= x(3x-2)-4(3x-2)$ mise en évidence double

$= (x-4)(3x-2)$

e) $7x^2+15x+2 = 7x^2+14x+x+2$ Somme-produit avec somme 15 et produit 14.

$= 7x(x+2)+1(x+2)$ mise en évidence double.

$= (7x+1)(x+2)$

f) $3xy+3yz-xz-z^2 = 3y(x+z)-z(x+z)$ mise en évidence double.

$= (3y-z)(x+z)$

g) $x^5+16x^3 = x^3(x^2+16)$ mise en évidence simple.

x^2+16 ne se factorise pas davantage.

#3 a) La fonction a comme zéros -1 et 3.

Donc, $f(x) = d(x+1)(x-3)$

De plus, $f(1) = 4 = d(1+1)(1-3)$

$\Rightarrow d = \dfrac{4}{2\cdot -2} = -1$

Donc, $f(x) = -1(x+1)(x-3) = -x^2+2x+3$

Devoir I (suite)

#3 b) La fonction est une droite, donc $f(x) = ax+b$.

De plus,

$$0 = 1{,}5\,a + b \quad (1)$$
$$\text{et} \quad 3 = 3\,a + b. \quad (2)$$

En soustrayant ((2) − (1)), on obtient $3 = 1{,}5a$ et donc $a=2$.

De plus, en remplaçant $a=2$ dans (2), on trouve
$$3 = 6+b \Rightarrow b = -3.$$

D'où $f(x) = 2x-3$.

c) La fonction f n'a pas de zéro, mais $g(x) = f(x) - 7$ a comme zéros -4 et 0.

D'où $g(x) = d\,x(x+4)$ et $(-2,-4)$ appartient au graphe de g. Donc

$$g(-2) = -4 = d \cdot -2(-2+4)$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{-2\cdot 2} = d$$

$$\Rightarrow 1 = d.$$

Donc, $g(x) = x(x+4)$ et $f(x) = x(x+4)+7 = x^2+4x+7$

#4 a) On sait que $f(175)=35$ et $f(425)=15$.

Alors,

$$35 = 175a + b \qquad (3)$$

et $$15 = 425a + b. \qquad (4)$$

Donc, en soustrayant ((3)-(4)), on trouve

$$20 = -250a$$

et $$a = \frac{-20}{250} = -0{,}08.$$

En remplaçant dans (3),

$$35 = 175 \cdot -0{,}08 + b$$
$$= -14 + b$$
$$\Rightarrow b = 49$$

Donc, la quantité restante dans le réservoir d'essence est donnée par

$$f(x) = -0{,}08x + 49.$$

b) La quantité d'essence au départ est donnée par $f(0)=49$. Il y avait 49 L dans le réservoir au départ.

* J'ai oublié c). voir plus bas

d) Le contexte force que le domaine et l'image soient compris dans les nombres positifs (la distance et la quantité d'essence doivent être positives)

Donc, l'image de la fonction est l'intervalle $[0,49]$.

Le domaine, en plus d'être positif, est limité par le fait qu'il doit rester de l'essence dans le réservoir. Il ne reste plus d'essence lorsque

$$0 = -0{,}08x + 49 \Rightarrow x = 612{,}5.$$

D'où le domaine est l'intervalle $[0, 612{,}5]$.

* c) Le réservoir est vide lorsque $f(x)=0$.

$$0 = -0{,}08x + 49 \Rightarrow x = 612{,}5$$

Le réservoir est vide après 612,5 km.

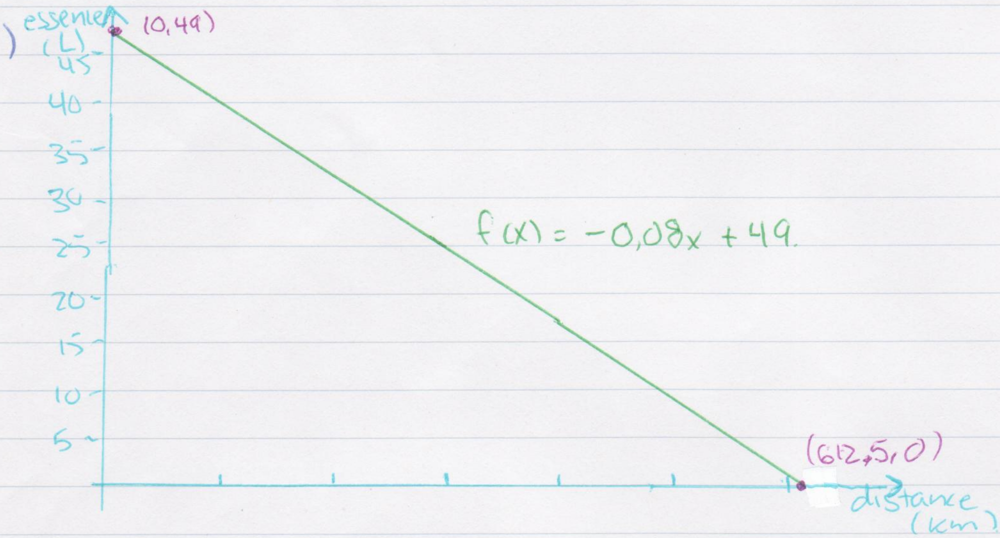
CENTRE
DE RECHERCHES
MATHÉMATIQUES

Corrigé devoir I - suite

#4 e) Après 500 km, la quantité restante d'essence est donnée par $f(500) = -0{,}08 \cdot 500 + 49 = -40 + 49$, soit 9L.

f) Le paramètre $a = -0.08$ correspond à la variation des réserves d'essence par kilomètre. Plus concrètement, ça veut dire que la voiture consomme 8L aux 100 km.

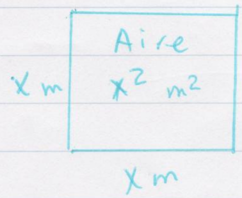
g)



#5 a) en $x=0$; $y = 0^3 + 2 \cdot 0 + 17 = 17$

en $x=-2$, $y = (-2)^3 + 2(-2) + 17 = -8 - 4 + 17 = 5$.

b)



L'aire d'un carré dont la mesure d'un côté est x est donnée par $A(x) = x^2$.

Ici, $A(x) = x^2 = 81$. Donc $x = \pm 9$ m.
Or, -9 m ne peut être une mesure.

Donc la mesure d'un côté est 9m.

c) Comme vu en démonstration (séance III), l'aire d'un rectangle de périmètre 100 m en fonction de la mesure x d'un des côtés est $A(x) = x(50-x)$. Les zéros de cette fonction sont 0 et 50, donc le sommet est en $x = 25$. D'où, l'aire maximale est 625 m^2.