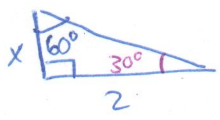
MAT0339 - Mathématiques générales 7 novembre 2018

Devoir II

#1 a)



Comme la somme des angles d'un triangle est 180°, on sait que le troisième angle est 30°.
Comme $\sin(30°) = 1/2$, l'hypoténuse vaut alors $2x$.
Par le théorème de Pythagore,

$$(2x)^2 = x^2 + 2^2$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 = x^2 + 4$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 = 4$$

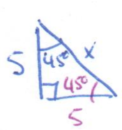
$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{4/3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Donc $x = 2\sqrt{3}/3 \approx 1.155$.

Solution alternative acceptée :

$$\tan(60°) = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{\tan(60°)} \approx 1.155$$

b)



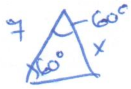
On peut trouver le troisième angle, qui est 45°. Le triangle est alors isocèle et les deux cathètes mesurent 5 unités.
Par le théorème de Pythagore,

$$x = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7.071$$

Solution alternative acceptée :

$$\sec(45°) = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5 \cdot \sec(45°) = 5 \cdot \sqrt{2},$$

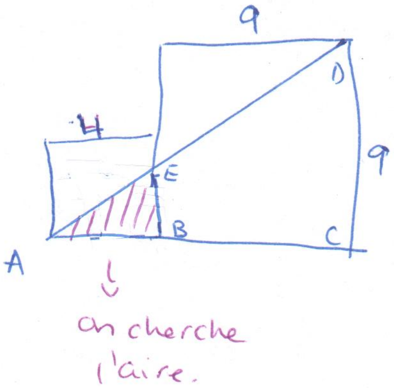
où la dernière égalité vient de $\sec(45°) = \frac{1}{\cos(45°)} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}$.

c) 

Un triangle qui a deux angles de 60° est équilatéral.

Donc $x=7$.

d)



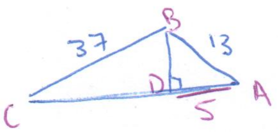
On cherche l'aire du triangle ABE.
Ce triangle est semblable à ACD, parce que les côtés $\overline{BE}$ et $\overline{CD}$ sont parallèles et que l'angle en A est le même.
Le côté $\overline{AC}$ mesure 13 unités, et le côté $\overline{AB}$ en mesure 4.
Donc, $\overline{BE}$ mesure $4/13\, m\overline{CD} = 4/13 \cdot 9$ unités.

Comme l'aire d'un triangle rectangle est donné par le produit de ses cathètes divisé par deux:

$$\text{Aire}(\triangle ABE) = \frac{m\overline{AB} \cdot m\overline{BE}}{2} = \frac{4 \cdot 4/13 \cdot 9}{2} = 72/13 \approx 5.54 \text{ unités carrées}$$

e) L'aire est donnée par la formule

$$\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}.$$



Pour la base, on peut choisir $\overline{AC}$. La hauteur est alors $\overline{BD}$.

On trouve la mesure de $\overline{BD}$ par le théorème de Pythagore : $\sqrt{13^2-5^2} = 12$ unités.

On trouve celle de $\overline{CD}$ de la même façon :

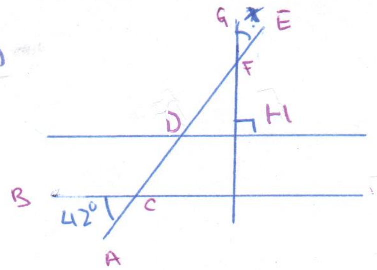
$\sqrt{37^2-12^2} = 35$.

D'où, $m\overline{AC} = m\overline{AD} + m\overline{DC} = 35+5 = 40$ unités

L'aire du triangle vaut

$$\frac{40 \cdot 12}{2} = 240 \text{ unités carrées.}$$

③

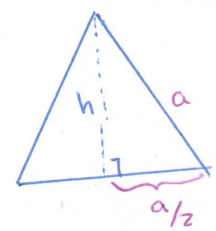
f) 

L'angle x vaut 48°.

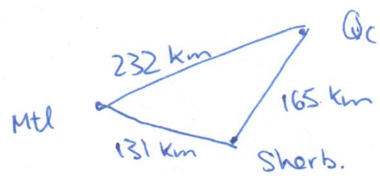
Preuve : $m\angle ACB = m\angle HDF$, car ils sont alternes-externes. Donc, $m\angle HDF = 42°$.

- Comme $\angle DHF$ est un angle droit, $m\angle HFD = 90° - m\angle HDF = 90° - 42° = 48°$.
- $m\angle HFD = m\angle EFG$, car ils sont opposés par le sommet. L'angle $\angle EFG$ est l'angle x.

g) La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a mesure $\sqrt{3}a/2$ unités. En effet, nous avons le dessin suivant



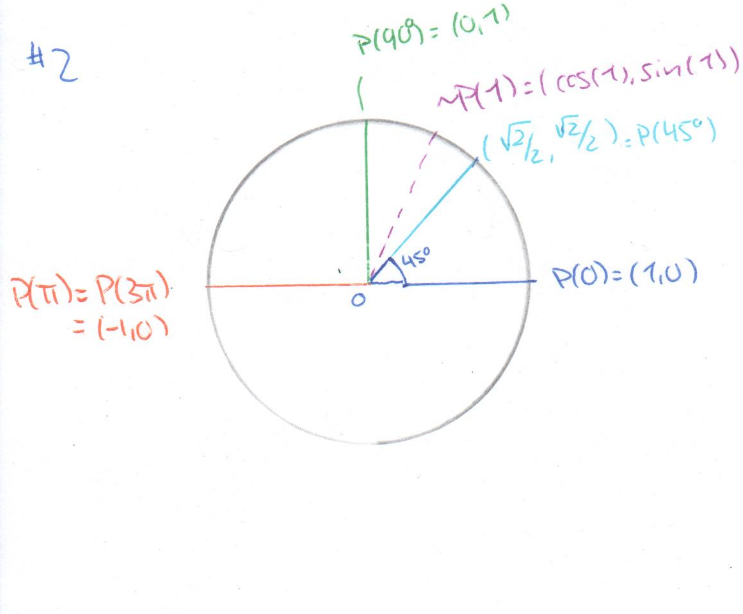
Par le théorème de Pythagore, $h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = \sqrt{3a^2/4} = \dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}$.

h) 

Pour trouver l'angle où se situe Montréal, on utilise la loi des cosinus :

$$\cos(\angle Mtl) = \frac{232^2 + 131^2 - 165^2}{2 \cdot 232 \cdot 131} = 0.720$$

$\Rightarrow m\angle Mtl \approx 43.95°$

#2 

a) $P(45°) = (\cos(45°), \sin(45°))$
$= (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ (tel que vu en classe ou effectué avec la calculatrice)

b) $P(0)$ est le point du cercle trigonométrique sur l'axe des abscisses positif. Donc $P(0) = (1,0)$

c) $P(1)$, où 1 est une mesure d'angle donnée en radians.
Avec la calculatrice, on trouve
$P(1) = (\cos(1), \sin(1)) \approx (0.540, 0.841)$

d) $P(90^\circ)$ est le point du cercle trigonométrique sur l'axe des ordonnées positif. D'où $P(90^\circ) = (0,1)$.

e) $P(3\pi) = P(\pi)$, car la fonction P est périodique de période 2π. Or, π est l'angle opposé à 0 sur le cercle trigonométrique. Donc, $P(3\pi) = P(\pi) = -P(0) = (-1,0)$.

f) On sait que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Alors,

$$(1/4)^2 + \cos^2(x) = 1.$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2(x) = 15/16$$

$$\Rightarrow \quad \cos(x) = \pm\sqrt{15/16} = \pm \sqrt{15}/4.$$

Donc $\cos(x)$ vaut $\sqrt{15}/4$ ou $-\sqrt{15}/4$.

g) Il n'existe aucune valeur de x pour laquelle $\sin(x) = 10$, car l'image de sinus est comprise entre -1 et 1.

#3. a) $\sin(0) = 0$

b) $\sin(17^\circ) \approx 0.292$

c) $\sin(\pi) = 0$

d) $\sin^{-1}(\sqrt{3}/2) = 60^\circ$.

En effet, $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2$ et l'image d'$\arcsin(x)$ est compris entre -90° et 90° $(-\pi/2$ et $\pi/2$, en radians$)$.

e) $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$ ou 45°.

L'image d'arccos est entre 0 et π.

f) Le domaine de $\sin(x)$ est $\mathbb{R}$ et son image est $[-1,1]$, comme vu en classe.

g) Le domaine de $\cos(x)$ est $\mathbb{R}$ et son image est $[-1,1]$, car $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$

h) La fonction $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ n'est pas définie lorsque $\cos(x) = 0$.

Ainsi, son domaine est $\mathbb{R} \setminus \{ n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \}$.

Son image est $\mathbb{R}$.

i) Le domaine de $\arctan(x)$ correspond à l'image de sa fonction inverse, soit $\tan(x)$. Donc, le domaine est $\mathbb{R}$.

Son image correspond à une restriction du domaine de tan sur lequel tan est injective. On peut choisir $(-\pi/2, \pi/2)$.

j) La période de $\sin(x)$ est celle du cercle trigonométrique, soit 2π. Son amplitude est 1, car son maximum est 1 et son minimum est -1.

k) La période de $3\sin(x/2)$ est 4π, car $2\pi / \tfrac{1}{2} = 4\pi$.

Son amplitude est 3.

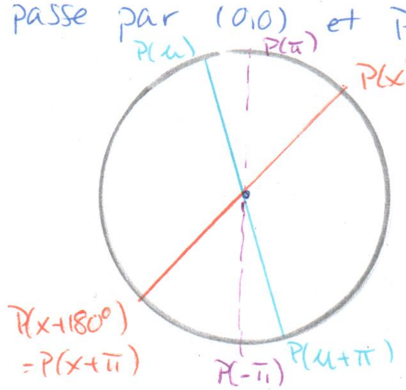
l) La période et l'amplitude de $\sin(x+3)$ sont les mêmes que pour $\sin(x)$, car il n'y a qu'un déphasage entre les deux.

Donc la période est 2π et l'amplitude est 1.

m) La période de $\tan(x)$ est π.

En effet, la période de $\tan(x)$ doit diviser 2π, car on sait que $P(x) = P(x+2\pi)$. Il faut donc que $\tan(x) = \tan(x+2\pi)$.

Or, on peut interpréter $\tan(x)$ comme la pente de la droite qui passe par $(0,0)$ et $P(x)$.



Or, cette droite est la même pour x et $x+\pi$.

Donc $\tan(x) = \tan(x+\pi)$ pour toute valeur de x.

Enfin, entre $-\pi$ (inclusivement) et π (exclusivement) toutes les droites sont distinctes.

#4 On a vu en classe (et en démo) que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Ainsi, lorsque que $\cos(x) \neq 0$,

$$\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^2$$

$$\Rightarrow (\tan(x))^2 + 1 = (\sec(x))^2$$

Enfin, $\cos(x) = 0$ exactement lorsque $x \in \{\frac{n\pi}{2}, n \text{ impair}\}$.

#5 a) La durée moyenne du jour est d'environ 12h.

b) La durée minimale du jour est d'environ 8h, et la durée maximale d'environ 16h.

c) La durée du jour atteint sa moyenne aux équinoxes de printemps et d'automne. L'équinoxe de printemps est atteint environ au 80ᵉ jour de l'année, et celui d'automne, une demie année plus tard.

Donc, $x \in \{\frac{365,25}{2} n + 80, n \text{ un entier}\}$.

d) La période correspond à un an, soit 365 ¼ jours.

e) L'amplitude est de 4h, soit la distance maximale à la durée moyenne.

f) $f(x) = 4 \sin\left(\frac{2\pi}{365,25}(x - 80)\right) + 12$