Mathématiques générales 28 novembre 2018
MAT 0339

Devoir III

#1. Rappel : L'opération de transposition agit comme suit

$$A^T = B, \quad \text{avec } b_{ij} = a_{ji}.$$

Avec cette notation, $(A^T)^T = B^T$ et l'entrée (i,j) de la matrice $(A^T)^T$ est $b_{ji} = a_{ij}$.

Donc les entrées de $(A^T)^T$ et A sont les mêmes et $A = (A^T)^T$.

#2 a) $$\left| 2\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 14 & 26 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 14 \cdot 4 - 2 \cdot 26 = 4$$

b) $$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2(-1) + 3(1)$$
$$= 5$$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$ implique que $3 \cdot 4 \cdot \cos(x) = 6$, où x est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Alors, x vaut $\pm 60°$ et, $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \pm 3 \cdot 4 \cdot \sin(60°)$
$= \pm 6\sqrt{3}$.

Alternativement, on a vu en classe que l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est

$$\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} = \sqrt{144 - 36}$$
$$= 6\sqrt{3}.$$

Le déterminant vaut donc $\pm 6\sqrt{3}$.

d) $\Delta\langle(6320,1700),(632,170)\rangle = 0$, car le déterminant de deux vecteurs colinéaires est nul.

e) $\Delta\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle = 0$, car le déterminant de trois vecteurs coplanaires est nul.

f) Le déterminant de vecteurs orthogonaux étant le produit des normes (à signe près), il est ici de ± 48.

#3 a) La distance entre deux points est la norme du vecteur qui les relie: $\|(1,0,1)-(-1,1,-1)\| = \|(2,-1,2)\| = \sqrt{4+1+4} = 3$

b) $\|(2,7)-(7,2)\| = \|(-5,5)\| = 5\sqrt{2}$

c) $\vec{AB} = (3,6)-(2,3) = (1,3)$, $\vec{CD} = (9,7)-(1,1) = (8,6)$

La norme de la projection orthogonale de $\vec{AB}$ sur $\vec{CD}$ est

$$\left\|\frac{\vec{AB}\cdot\vec{CD}}{\|\vec{CD}\|^2}\vec{CD}\right\| = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{CD}}{\|\vec{CD}\|} = \frac{1\cdot 8+3\cdot 6}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{26}{10} = 2{,}6.$$

d) La norme de $(4,6,-2,5)$ est $\sqrt{4^2+6^2+(-2)^2+5^2} = 9$.

Alors,

$$\left(4/9,\ 6/9,\ -2/9,\ 5/9\right)$$

est parallèle à $(4,6,-2,5)$ et sa norme est 1.

e) L'angle x entre $(6,3,5)$ et $(2,0,1)$ est tel que

$$\cos(x) = \frac{(6,3,5)\cdot(2,0,1)}{\|(6,3,5)\|\cdot\|(2,0,1)\|} = \frac{17}{\sqrt{70}\sqrt{5}} = \frac{17}{5\sqrt{14}} \approx 0.907$$

et l'angle x vaut environ $24.68°$.

#4 a) Le volume du parallélipipède est la valeur absolue du déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 8 - (-5) + 1$$

$$= 22$$

Donc le volume est 22 unités cubes.

b) Le triangle dont les sommets sont $(1,2)$, $(5,5)$ et $(6,3)$ est compris entre les vecteurs $(5,5)-(1,2)=(4,3)$ et $(5,5)-(6,3)=(-1,2)$. Son aire est la moitié de celle du parallélogramme engendré par ces vecteurs :

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

Donc l'aire du triangle est 5.5 unités carrées.

#5. a)

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 11 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -14 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 15 \\ -1 & -15 & 3 \\ 18 & -10 & 9 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & -14 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 11 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 14 & -14 \\ 6 & 33 & -6 \\ 12 & 66 & -21 \end{pmatrix}$$

b)

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 21 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 50 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -55 & 1 \\ 57 & -5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 50 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 21 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 58 & -54 & 48 \\ -23 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

c)

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 11 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 50 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & -4 \\ -53 & 1 \\ 550 & -18 \end{pmatrix}$$

BA n'est pas possible, à cause des dimensions.

#6 a) $\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix}$

b) Elles donnent les probabilités par la météo d'après-demain sachant la météo d'aujourd'hui.

c) $A^3 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & 0.417 \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

Il y a 41.7% de chances qu'il fasse un temps nuageux et pluvieux dans 3 jours.

#7 Les vecteurs $\vec{CA}$ et $\vec{CB}$ sont données par $(2,0,-c)$ et $(0,3,-c)$.

Alors,

$$\|\vec{CA}\| = \sqrt{4+c^2}$$

et

$$\|\vec{CB}\| = \sqrt{9+c^2}.$$

De plus, $\cos(60°) = 1/2$.

Enfin, $\vec{CA}\cdot\vec{CB} = (2,0,-c)\cdot(0,3,-c) = c^2$.

D'où,

$$c^2 = \frac{1}{2}\sqrt{(4+c^2)(9+c^2)}$$

$$\Rightarrow (2c^2)^2 = (4+c^2)(9+c^2)$$

$$\Rightarrow 4c^4 = c^4 + 13c^2 + 36$$

$$\Rightarrow 3c^4 - 13c^2 - 36 = 0.$$

$$\Rightarrow c^2 = \frac{13+\sqrt{169+432}}{6} \approx 6.253$$

$$\Rightarrow c \approx 2.5$$