Mathématiques générales
MAT 0339

17 octobre 2018

Examen I - Solutions

#1 Les fonctions croissantes sont π^x+2, $3^{x/2}-1$, $2\log_3 x/2$, $-\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}-3$ et $-7\log_{1/3} x$.

#2

a) fonction quadratique

b) fonction linéaire

c) fonction logarithmique

d) fonction rationnelle

e) fonction exponentielle.

#3

a) $x^3-14x^2+40x = x(x^2-14x+40)$ Mise en évidence simple

$= x(x-4)(x-10)$ Méthode somme-produit avec $u+v=-14$, $u\cdot v=40$ $\Rightarrow \{u,v\}=\{4,-10\}$.

b) $x^3+81x = x(x^2+81)$ Mise en évidence simple. Il ne se factorise pas davantage

c) $x^3+27 = (x+3)(x^2-3x+9)$

En effet, $(x^3+27)\div(x+3) = x^2-3x+9$ et x^2+3x+9 ne se factorise pas.

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3+27 & x+3 \\ \hline
- & x^3+3x^2 & x^2-3x+9 \\ \hline
 & -3x^2+27 & \\
- & -3x^2-9x & \\ \hline
 & 9x+27 & \\
 & 9x+27 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

#4 a) Le domaine de $x^2+3x+2+\sqrt[3]{x}$ est $\mathbb{R}$.

En effet, x^2+3x+2 est un polynôme et est donc défini partout.

Quant à $\sqrt[3]{x}$, cette fonction est définie partout, car c'est une racine impaire.

Donc la somme $x^2+3x+2+\sqrt[3]{x}$ est définie partout.

b) Le domaine de $\sqrt{x+1}$ est $[-1, +\infty)$.

En effet, $x+1$ doit être positif par que la racine soit définie, car c'est une racine paire.

c) Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

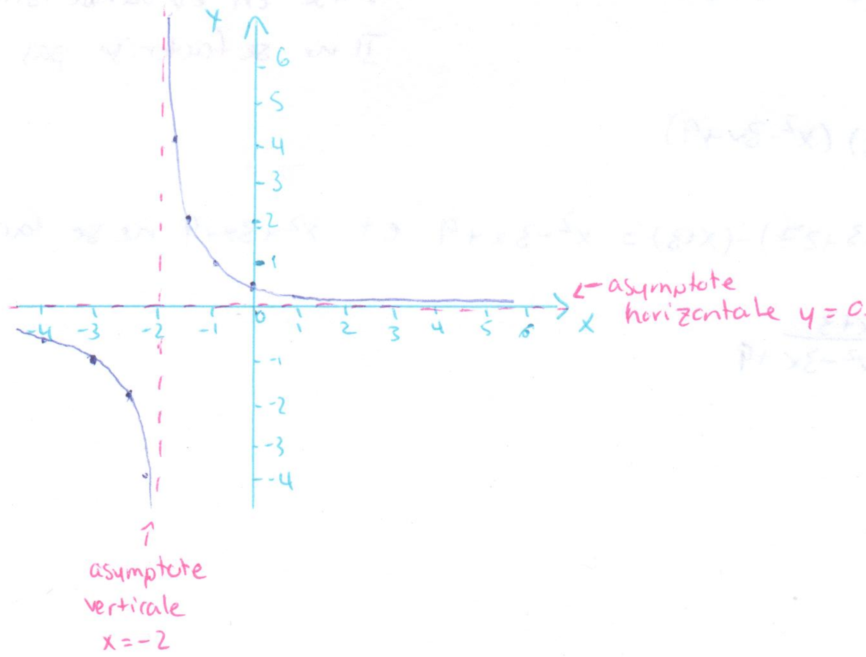
Par qu'une fonction rationnelle soit définie, il faut que son dénominateur soit non-nul.

Or, $x^2+2x+1 = (x+1)^2 = 0$ si et seulement si $x=-1$.

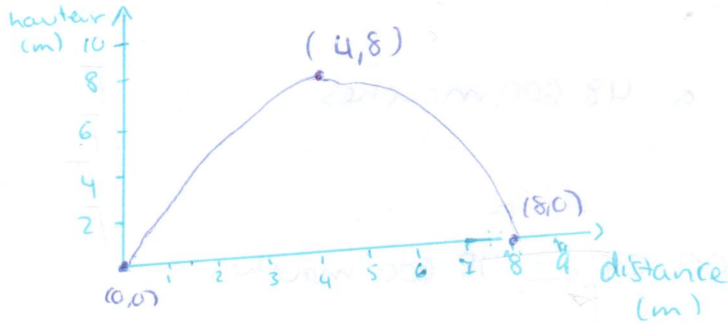
Donc le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

d) Le domaine est $[0, 100]$, car il correspond au nombre de kilogrammes de pommes que je peux acheter dans ce magasin.

#5



#6



a) Le ballon atterrira à 8 m d'où il a été lancé, parce que la parabole est symétrique par rapport au sommet et que le sommet est atteint vis-à-vis 4 m plus loin que la position de son lancement.

b) On sait que l'équation de la parabole sera de la forme $f(x) = d\,x(x-8)$, car 8 et 0 sont ses zéros.

Pour trouver d, on remplace $(x, f(x))$ par $(4,8)$:

$$8 = d \cdot 4(-4)$$
$$= -16d$$
$$\Rightarrow d = -1/2.$$

L'équation de la parabole est donc $f(x) = \frac{-x(x-8)}{2} = \frac{-x^2}{2} + 4x$

c) Le domaine de cette fonction est $[0,8]$ (le ballon n'est pas dans les airs ailleurs).
L'image est aussi $[0,8]$

#7 Le paramètre a correspond au nombre initial de mouches, donc $a=200$. Le paramètre c est une quantité constante qui s'ajoute, comme une telle quantité n'existe pas dans le problème, $c=0$.
Pour connaître b, on utilise le point $(3, 5400)$:

$$5400 = 200 \cdot b^3$$
$$\Rightarrow 27 = b^3$$
$$\Rightarrow 3 = b.$$

suite →

Donc, $f(x) = 200 \cdot 3^x$.

b) Au bout de 5 jours, il y a 48 600 mouches.

En effet,

$$f(5) = 200 \cdot 3^5 = 200 \cdot 243 = 48\,600$$

c) iii. Après 10 à 20 jours.

On peut chercher quand est-ce qu'il y aura un milliard de mouches:

$$10^9 = 200 \cdot 3^x$$

$$\Rightarrow 5\,000\,000 = 3^x.$$

$$\Rightarrow x = \log_3 3^x = \log_3 (5\,000\,000)$$

$$= \log_3 (5 \times 10^6)$$

$$= \underbrace{\log_3 (5)}_{\text{entre 1 et 2}} + 6 \underbrace{\log_3 (10)}_{\text{entre 2 et 3.}}$$

Donc x est compris entre $1+6\cdot 2 = 13$ et $2+6\cdot 3 = 20$.