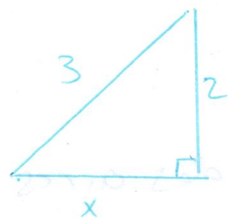
Mathématiques générales 12 décembre 2018

Examen II

#1

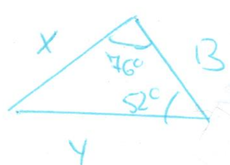
a)



Par le théorème de Pythagore,

$$x = \sqrt{3^2 - 2^2}$$
$$= \sqrt{9-4}$$
$$= \sqrt{5}$$
$$\approx 2.24$$

b)



Le troisième angle vaut

$$(180 - 76 - 52)^\circ = 52^\circ$$

Donc le triangle est isocèle et $x = 13$.

c) (sur le même triangle)

On applique la loi des sinus

$$\frac{y}{\sin(76^\circ)} = \frac{13}{\sin(52^\circ)} \Rightarrow y = \frac{13\sin(76^\circ)}{\sin(52^\circ)} = 16.01$$

Donc $y = 16.01$.

#2 a) Les triangles sont semblables, car ils ont deux paires d'angles isométriques.

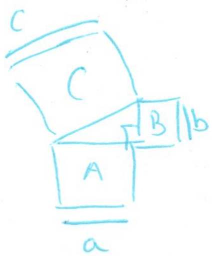
b) Les triangles ne sont pas semblables, car les rapports de leurs côtés homologues ne sont pas égaux

$$\frac{1}{1} \neq \frac{3}{5}$$

c) Les triangles sont semblables. En effet, ils ont deux paires de côtés homologues dont le rapport est le même et que l'angle entre les deux est le même :

$$\frac{7}{10} = \frac{7}{10}.$$

#3 L'aire du carré C est égale à la somme des aires de A et B. En effet,



Aire (C) = c^2
Aire (B) = b^2
Aire (A) = a^2.

Par le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$.

4

Le point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ n'appartient pas au cercle trigonométrique.

Pour qu'un point (x,y) appartienne au cercle trigonométrique, il faut que $x^2+y^2=1$.

Or, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

5

a) $\vec{u} \cdot \vec{w} = (3,2) \cdot (4,3) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 12+6 = 18$

b) $\vec{w} - \vec{u} = (4,3) - (3,2) = (4-3, 3-2) = (1,1)$

c) $-\vec{w} = -(4,3) = (-4,-3)$

d) $\Delta\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9-8 = 1$

e) $\Delta\langle \vec{0}, \vec{w} \rangle = 0$ (l'aire d'un parallélogramme engendré par le vecteur nul est forcément 0).

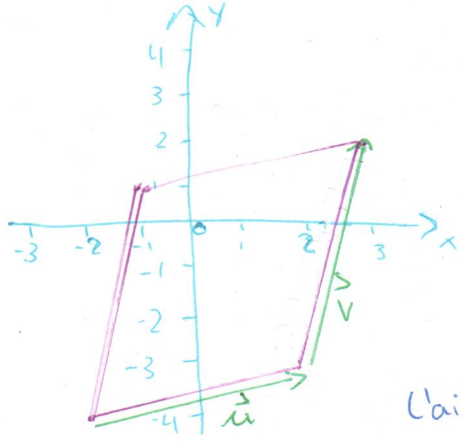
f) $\begin{vmatrix} 350 & 60\sqrt{2} \\ 35 & 6\sqrt{2} \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 35 & 6\sqrt{2} \\ 35 & 6\sqrt{2} \end{vmatrix} = 10 \cdot 0 = 0$,

car le déterminant de vecteurs colinéaires est toujours nul.

g) $(-2,3)$ est orthogonal à $(3,2)$:

$$(-2,3) \cdot (3,2) = -6+6 = 0.$$

6



$\vec{u} = (2,-3) - (-2,-4)$

$= (2 - -2, -3 - -4)$

$= (4,1)$

$\vec{v} = (3,2) - (2,-3)$

$= (3-2, 2 - -3)$

$= (1,5)$

L'aire du parallélogramme est la valeur absolue de $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19$. L'aire vaut donc 19 unités carrées.

#7 a) les matrices $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ sont respectivement de format 3×1 et 2×1.

Donc A est de format 2×3.

b) $$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot6\\3\cdot5+4\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\39\end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix}3 & 5 & 6\\4 & 1 & 7\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}3 & 4\\5 & 1\\6 & 7\end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-0 & 2-1\\3-1 & 4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 4\end{pmatrix}$$

#8 Le système nous donne la matrice augmentée suivante.

$$\left(\begin{array}{cc|c}3 & -2 & 26\\2 & 2 & -6\end{array}\right).$$

On le résoud:

$$\left(\begin{array}{cc|c}3 & -2 & 26\\2 & 2 & -6\end{array}\right)\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1+L_2}\left(\begin{array}{cc|c}5 & 0 & 20\\2 & 2 & -6\end{array}\right)\xrightarrow[L_2\leftarrow \frac{1}{2}L_2]{L_1\leftarrow \frac{1}{5}L_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 4\\1 & 1 & -3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-L_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 4\\0 & 1 & -7\end{array}\right)$$

Donc, $x=4$ et $y=-7$.

Vérification:

$3\cdot4-2(-7)=12+14=26$ ✓

$2\cdot4+2\cdot-7=8-14=-6$ ✓