

# Série d'exercices XI

Mathématiques générales (MAT0339)

17 novembre 2018

Cette feuille d'exercices devrait vous permettre de comprendre la matière du cours de cette semaine. À moins d'indication contraire, vous pouvez utiliser la calculatrice pour faire ces exercices.

## Orientation relative de vecteurs

1. Déterminez l'orientation (positive ou négative) de chacune des suites de vecteurs suivantes.

(a)  $\langle (-3, 5), (1, 1) \rangle$

(d)  $\langle (1, 0, 1), (0, -1, 0), (1, 1, 0) \rangle$

(b)  $\langle (-1, 0), (0, -1) \rangle$

(e)  $\langle (3, 1, 2), (0, 1, 5), (1, 1, 1) \rangle$

(c)  $\langle (3, -2), (-4, 2) \rangle$

2. À l'aide des déterminants, déterminez si les vecteurs suivants sont colinéaires :

(a)  $(3, 8)$  et  $(12, 31)$

(b)  $(-9, 21)$  et  $(3, -7)$

3. À l'aide des déterminants, déterminez si les points suivants sont alignés :

(a)  $(3, 1)$ ,  $(-2, 5)$  et  $(10, -8)$

(c)  $(-9, 21)$  et  $(3, -7)$

(b)  $(-1, 3)$ ,  $(-3, 7)$  et  $(2, -3)$

## Aires et volumes

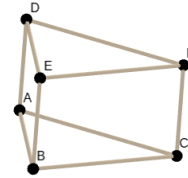
4. Calculer l'aire des triangles dont les sommets sont donnés par les points suivants.

(a)  $(2, 5)$ ,  $(-2, 4)$  et  $(3, 3)$

(b)  $(5, 0)$ ,  $(0, 5)$  et  $(-5, 5)$

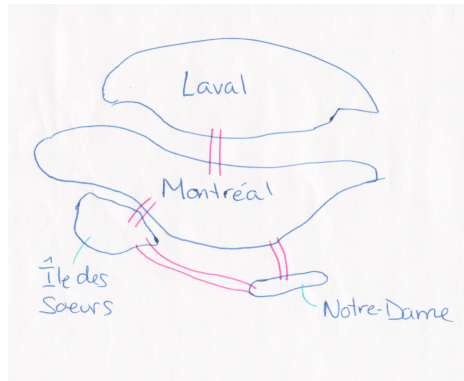
5. Calculer le volume du parallépipède engendré par les vecteurs  $(2, 1, 1)$ ,  $(-1, 1, 3)$  et  $(1, -2, 2)$ .

6. À l'aide d'un déterminant, calculer le volume du prisme triangulaire dont les sommets sont donnés par  $A = (3, 1, 2)$ ,  $B = (2, 2, 0)$ ,  $C = (4, 5, 3)$ ,  $D = (5, 0, 3)$ ,  $E = (4, 1, 1)$  et  $F = (6, 4, 4)$ .



## Matrices

7. Quatre îles sont reliées par des ponts comme dans la figure ci-dessous.



- (a) Donner la matrice d'adjacence  $A$  de cet archipel, dans laquelle l'entrée  $a_{(\text{île } 1, \text{île } 2)}$  vaut 1 s'il existe un pont entre les deux îles et 0 sinon.
- (b) S'il y avait sept îles, quelles seraient les dimensions de la matrice? Est-ce que la matrice peut ne pas être carrée?
- (c) Existe-t-il des symétries particulières dans cette matrice?
- (d) Calculer  $A^2$ .
- (e) Que signifient les valeurs de la matrice  $A^2$ ?

## Opération sur les matrices

8. Montrer que  $(A + B)^T = A^T + B^T$ .

9. Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Effectuer les opérations suivantes :

- |              |          |              |          |
|--------------|----------|--------------|----------|
| (a) $-2A$    | (c) $AC$ | (e) $A + 2B$ | (g) $CB$ |
| (b) $B - 2A$ | (d) $CD$ | (f) $3C - E$ | (h) $EB$ |

10. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

- (a) Calculer  $AB$  et  $BA$ .  
 (b) Que peut-on remarquer sur les colonnes de  $A$  par rapport à celles de  $AB$ ?  
 (c) Que peut-on remarquer sur les lignes de  $A$  par rapport à celles de  $BA$ ?  
 (d) Quelle propriété de  $B$  permet d'expliquer ces observations?

11. Dans chacune des équations suivantes, trouver le format de la matrice  $A$ .

(a)	$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	(c)	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
-----	--	-----	--

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

12. Effectuez les produits matriciels suivants.

(a)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	(b)	$(1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} (1 \ 1 \ 1)^\top$
-----	--	-----	--

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^3$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Pour prédire l'issue des élections longtemps d'avance, les analystes observent les mouvements dans le vote des électeurs d'une élection à l'autre. Les proportions observées sont données dans le tableau suivant.

Prochaine élection	Néo-démocrate	Conservateur	Libéral
Dernière élection			
Néo-démocrate	70 %	10 %	20 %
Conservateur	10 %	80 %	10 %
Libéral	20 %	20 %	60 %

Aux dernières élections, les libéraux ont obtenu près de 40 % des votes, les conservateurs environ 30 % et les néo-démocrates près de 20 %. On suppose que la proportion d'électeurs qui votent pour des partis plus marginaux est stable.

- Donner la matrice de transition pour les électeurs.
- Donner le vecteur représentant les résultats des dernières élections.
- Sans égard aux événements qui se sont passés entre temps, prédire l'issue des deux prochaines élections.