

Série d'exercices XIV

Mathématiques générales (MAT0339)

8 décembre 2018

Cette feuille d'exercices devrait vous permettre de comprendre la matière du cours de cette semaine. À moins d'indication contraire, vous pouvez utiliser la calculatrice pour faire ces exercices.

Règle de Cramer

1. Appliquer la règle de Cramer pour résoudre les systèmes d'équations suivants.

(a) $x + y = 1$ et $x - y = -1$

(b) $5x - y = 1$ et $x + 2y = 0$

(c) $3x + 6y = 8$ et $-x - 2y = 7$

(d) $2x + 3y + z = -1$, $3x - 2y + 4z = 0$ et $3y - 2z = 2$

(e) $x + y - z = 0$, $2x - y + z = 1$ et $x + 3y + 2z = -1$.

Systèmes d'équations linéaires

2. Soit A une matrice qui a au moins quatre lignes. Parmi les opérations suivantes sur A , lesquelles sont élémentaires ou équivalentes à une séquence d'opérations élémentaires ?

(a) $L_2 \leftarrow (3L_2 + 2L_4)$

(c) $L_3 \leftarrow (L_1 - L_2)$

(b) $L_3 \leftarrow \left(\frac{L_1 + L_2 + L_3}{3}\right)$

(d) $L_4 \leftarrow 3L_1$

3. Aram et Nancy sont des collectionneurs de billes passionnés. Depuis leur enfance, ils sélectionnent les plus belles billes pour les joindre à leur collection respective. Ils ont cependant une manière un peu différente de les entreposer. Aram conserve

ses billes dans des sacs pouvant en contenir 12, alors que Nancy utilise des sacs pouvant contenir 18 billes.

Les collections d'Aram et de Nancy réunies compte exactement 366 billes et le nombre de sacs de la collection d'Aram correspond au double du nombre de sacs de Nancy diminué de 1.

- (a) Décrire, en équations, le système d'équations linéaires qui permet de trouver le nombre de sacs de billes de chacun.
- (b) Donner la matrice augmentée de ce système.
- (c) Faites une suite d'opérations élémentaires de façon à trouver une matrice augmentée de la forme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array} \right)$$

avec a et b des nombres entiers.

- (d) Combien de sacs de billes possèdent-ils chacun ?
- (e) Combien de billes possède Nancy ?

4. Les systèmes suivants ont-ils les mêmes solutions ?

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 8 \end{array} \right) ?$$

5. Existe-t-il trois nombres qui satisfont les conditions suivantes :

- (a) La somme des trois nombres donne 1000 ;
- (b) La somme des deux premiers moins le troisième donne 200 ;
- (c) La somme des deux derniers moins le premier vaut 300 ;
- (d) La somme du premier et du dernier moins le deuxième donne 400 ?

6. Soit D et E deux droites dans \mathbb{R}^2 données par

$$D = \{(2, -3) + t(-1, 2), t \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad E = \{(3, 4) + s(5, 2), s \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Les droites D et E sont-elles parallèles, sécantes ou gauches ?

Le point d'intersection de D et de E est un point (x, y) pour lequel il existe deux nombres réels s et t tels que

$$(x, y) = (2, -3) + t(-1, 2) = (3, 4) + s(5, 2).$$

- (b) Écrire, pour chacune des deux coordonnées du point d'intersection, l'équation à satisfaire. Celle-ci dépend de s et de t .
- (c) À partir de ces équations, quelles sont les matrices A , de format 2×2 , et B , de format 2×1 telles que

$$A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = B?$$

- (d) Quelle est la matrice augmentée du système d'équations ?
- (e) Résoudre le système ci-dessus avec des opérations élémentaires sur les lignes.
- (f) Quelles sont les coordonnées (x, y) du point d'intersection ?

7. Soit D et E deux droites dans \mathbb{R}^3 données par

$$D = \{(-2, 10, -2) + t(-3, 8, -5), t \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad E = \{(5, 1, 13) + s(3, -2, 2), s \in \mathbb{R}\}.$$

- (a) Les droites D et E sont-elles parallèles ?
- (b) Écrire les trois équations que doit satisfaire un point d'intersection, s'il existe.
- (c) À partir de ces équations, quelles sont les matrices A , de format 3×2 , et B , de format 3×1 telles que

$$A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = B?$$

- (d) Quelle est la matrice augmentée du système d'équations ?
- (e) Existe-t-il une solution à ce système d'équations ?
- (f) Les droites D et E sont-elles gauches ou sécantes ?

Référence pour certains problèmes : Allô Prof, alloprof.qc.ca.