

Notes du cours XIII (à compléter)

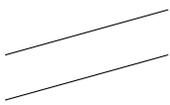
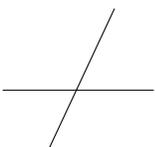
Mathématiques générales (MAT0339)

28 novembre 2018

Droites et plans

Position relative de deux droites, dans un espace de dimension 2.

Associer le nom, le symbole (s'il y a lieu), la définition et le dessin.

			a.	
1. Parallèles	\perp	i. Droites dont l'intersection forment un angle droit.	b.	
2. Perpendiculaires		ii. Droites qui se coupent en un point.		
3. Sécantes	\parallel	iii. Droites qui n'ont aucune intersection.	c.	

Remarque 1. Deux droites _____ sont aussi _____.

Remarque 2. On appelle aussi _____ deux droites qui sont parallèles et qui se coupent en une infinité de points. Hors, ces deux droites sont en fait la même droite.

Les **relations entre les droites** correspondent aussi aux **relations entre les vecteurs** dont ces droites sont l'orientation.

Distance entre deux droites

Méthode pour trouver un vecteur orthogonal. Un vecteur (a, b) est orthogonal au vecteur (c, d) si _____.

Exemple 3. Trouver un vecteur \vec{u} orthogonal à $\vec{v} = (4, 7)$.

Définition 4. La distance entre deux droites sécantes est _____.

La distance entre deux droites parallèles est la _____ d'un _____ compris entre les deux droites.

Pour la trouver, on prend deux droites D et E , puis :

1. On trouve un vecteur \vec{u} dont l'orientation est celle de D (ou E , puisque les droites ont la même orientation).
2. On trouve un point a sur la droite D et un point b sur E .
3. On trouve le vecteur \vec{v} de a à b .
4. Le _____ de \vec{u} et \vec{v} donne l'aire du parallélogramme formé par ces vecteurs. La base est le vecteur \vec{u} .
5. La _____ est donnée par la formule _____.

Exemple 5. Calculer la distance entre les droites D , dont l'équation est $y = x$, et E , donnée par $y = x + 2$.

Distance d'un point à une droite

Définition 6. La distance entre un point et une droite est la _____ d'un _____ formé par un segment de la droite et un segment compris entre la droite et _____.

Pour trouver la distance entre un point a et une droite D :

1. On trouve un vecteur \vec{u} dont l'orientation est celle de D .
2. On trouve un point b sur la droite D et on calcule le vecteur \vec{v} de a à b .
3. Le _____ de \vec{u} et \vec{v} donne l'aire du parallélogramme formé par ces vecteurs. La base est le vecteur \vec{u} .
4. La _____ est donnée par la formule _____.

Exemple 7. Calculer la distance entre la droite D dont l'équation est $y = 2x - 3$ et le point $(5, 8)$.

Position relative de deux droites, dans un espace de dimension 3

Définition 8. Dans un espace de dimension 3, deux droites peuvent être ni parallèles, ni sécantes. On dit alors qu'elles sont _____.

Exemple 9. Déterminer si les droites D et E ci-dessous sont parallèles, sécantes ou gauches.

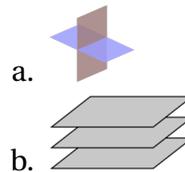
$$D = \{k(1, 1, 1), k \in \mathbb{R}\}, \quad E = \{k(1, 0, 0) + (0, 0, 1), k \in \mathbb{R}\}.$$

Position relative de deux plans

Définition 10. Un plan est déterminé par deux _____ et _____ et est constitué de tous les points a pour lesquels il existe k et l (réels) tels que _____.

Associer la relation, la définition et le dessin.

- | | |
|---------------------|---|
| 1. Plans parallèles | i. Plans qui n'ont aucun point en commun. |
| 2. Plans sécants | ii. Plans dont l'intersection est une droite. |



Remarque 11. Pour déterminer si deux plans sont parallèles, on utilisera leur vecteur normal, défini plus loin (Définition 15).

Produit vectoriel et vecteur normal

Problème 12. Étant donné deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} en dimension 3 qui ne sont pas parallèles, comment trouver un vecteur orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} ?

Par exemple, trouver un vecteur orthogonal à $(1, 2, 3)$ et à $(-3, 1, 5)$, après avoir vérifié qu'ils ne sont pas parallèles.

Définition 13. Le produit vectoriel _____ de 2 vecteurs $\vec{u} = (a, b, c)$ et $\vec{v} = (d, e, f)$ est le vecteur \vec{w} tel que

avec $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ et $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Exemple 14. Le produit vectoriel de $(1, 2, 3)$ et de $(-3, 1, 5)$ est

Définition 15. Un vecteur normal à un plan est un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

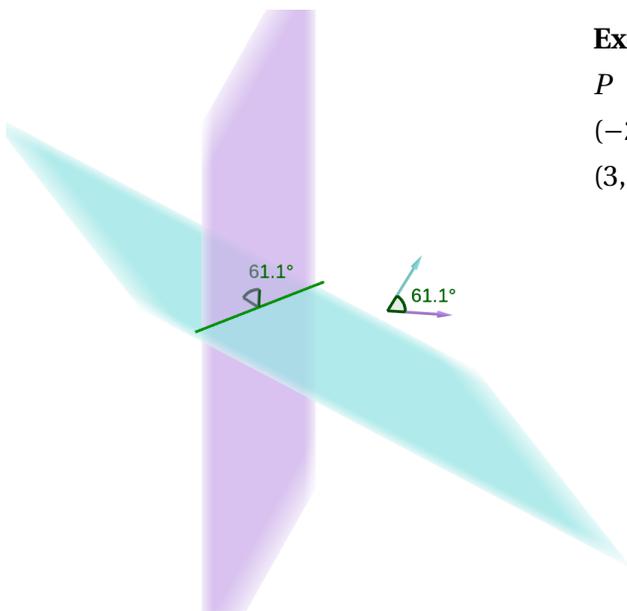
— Il peut exister plusieurs vecteur normaux à un plan, mais leur _____ est la même pour tous. Leur _____ et leur _____ changent.

Le résultat du produit vectoriel $u \wedge v$ est un vecteur normal du plan qui contient les vecteurs _____.

Proposition 16. Deux plans sont _____ s'ils ont les mêmes vecteurs normaux.

Angle entre deux plans

Définition 17. L'angle entre deux plans P et Q est l'angle _____.



Exemple 18. Quel est l'angle entre les plans P et Q , si P contient les vecteurs $(1, 3, 5)$ et $(-2, 2, 1)$ et Q est déterminé par $(0, 0, 1)$ et $(3, -4, 6)$.